VII Topologie 1

VII.A Questions de cours :

* Démontrer la caractérisation de l'adhérence par les suites.
* Démontrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
* Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans un evndf.

VII.B Exercices :

Exercice 1: **

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la distance à une partie non vide A de E est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. Montrer que la distance d'un élément $x \in E$ à A est nulle si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Exercice 2: * Sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H ; x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
   On admettra que pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, on a $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 3: ***

On pose $A = \{\mathrm{e}^{in} \quad / \quad n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\overline{A} = U$, l'ensemble des racines de l'unité dont on admet qu'il est fermé.

Exercice 4: ** Deux topologies violemment différentes / deux normes violemment non équivalentes

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E ; f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. En déduire que les normes ne sont pas équivalentes

Exercice 5: * Dense des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**

Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.
Si l'élève n'a pas encore vu le cours sur la diagonalisation, trigonalisation il admettre que toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

On peut aussi piocher dans les exercices de la colle sur les evn pour compléter la liste.